Korrespondenzzirkel Sachsen-Anhalt

Aufgabenserie 9 ***Termin: 12. Dezember 2000***

Themenblatt: Gleichungen

Klasse 9/10

Einleitung

In beinahe jedem mathematischen Wettbewerb tritt eine Aufgabe auf, in der nach der Lösungsmenge einer Gleichung oder eines Gleichungssystems gefragt wird. Die gegebenen Ausdrücke sind dabei, anders als in der Schule, meist nicht sofort von einer Form, in der man eine bekannte Formel, wie zum Beispiel die Lösungsformel für quadratische Gleichungen („p-q-Formel“), anwenden kann; sondern man muss meist einige zusätzliche schlaue Ideen haben. So können in den Gleichungen *Beträge* vorkommen, die Fallunterscheidungen notwendig machen. Oder aber man muss beim Umformen aufpassen, weil unter gewissen Wurzeln keine negativen Zahlen oder unter Bruchstrichen niemals 0 stehen darf. Noch vertrackter wird es manchmal, wenn in den Gleichungen *Parameter* zu finden sind, die die Lösungen unterschiedlich beeinflussen oder wenn nicht nach allen Lösungen, sondern beispielsweise nur nach *rationalen oder ganzzahligen Lösungen* (was, wie wir unten sehen werden, meist dasselbe ist) gesucht wird.
Am kompliziertesten jedoch sind meist sogenannte *Gleichungssysteme*, bei denen die zu findenden Lösungen mehrere Gleichungen gleichzeitig erfüllen sollen.
Bei allen diesen Fällen hilft, zumindest auf anhieb, keine aus dem Schulunterricht bekannte Formel. Was man dann tun kann und sollte, wird im Folgenden beschrieben.

„Einfache“ Gleichungen

Zunächst wollen wir die angesprochenen Gleichungssystem außen vor lassen und uns „einfachen“ (sowohl im Sinne von „nicht vielen“, also auch im Sinne von „nicht ganz so schwer“ zu verstehen) Gleichungen zuwenden. Dabei schenken wir den *linearen Gleichungen* mit nur einer Variable, also solchen von der Form $a \cdot x = b$, keine große Beachtung, da deren Lösung im Schulunterricht wirklich ausführlich besprochen wird. Der nächst kompliziertere Fall ist dann ...

Die quadratische Gleichung

Eine quadratische Gleichung hat die allgemeine Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0. \qquad (1)$$

Ihren Namen hat sie daher, dass in ihr die Variable x im Quadrat vorkommt. Damit dies auch wirklich so ist, muss natürlich $a \neq 0$ sein. Dann kann man die Gleichung aber durch a dividieren, und erhält mit der Substitution (Latein für „Ersetzung“) $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ die *Normalform* der quadratischen Gleichung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \qquad (2)$$

Deren Lösungsformel, die sogenannte *p-q-Formel*, steht in jedem Tafelwerk. Da aber das Verfahren der *quadratischen Ergänzung*, dass bei der Herleitung der p-q-Formel angewandt wird, auch anderweitig sehr nützlich sein kann, wollen wir die Herleitung kurz durchführen.
Ziel ist es zunächst, den linearen Term $p \cdot x$ in der Gleichung zu beseitigen, denn in einer „Restgleichung“

$$y^2 + s = 0 \qquad (3)$$

könnte man schnell sagen, dass die beiden einzig möglichen Lösungen

$$y_1 = \sqrt{-s} \quad \text{uns} \quad y_2 = -\sqrt{-s}$$

sind (hierbei müsste natürlich $s \leq 0$ sein!). Wie bringt man also (2) auf die Form (3)? Der Trick ist, den Term $x^2 + p \cdot x$ durch einen weiteren Term r so zu ergänzen (und am Ende wieder abzuziehen), dass der entstehende Ausdruck $x^2 + p \cdot x + r$ ein vollständiges Quadrat, entsprechend der binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ist. Dazu muss man hier also $r = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ wählen. Dann folgt aus (2)

$$\begin{aligned} x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dies entspricht aber genau der gewünschten Form (3) mit $y = x + \frac{p}{2}$ und $s = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Damit sind die beiden einzig möglichen Lösungen von (2) gefunden, nämlich:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{4}$$

Mit der sogenannten *Diskriminante* $D = p^2 - 4q$ lässt sich dies auch in der Form $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{D}\right)$ schreiben. Man sieht also:
Die quadratische Gleichung hat im Fall $D < 0$ gar keine reelle Lösung, weil dann die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden müsste. Im Fall $D = 0$ gibt es nur eine (doppelte) Lösung und für $D > 0$ hat die quadratische Gleichung zwei verschiedene Lösungen.
Wie schon erwähnt, hat die quadratische Ergänzung auch anderweitig vielfältige Anwendungsmöglichkeiten.

Beispiel 1. *Finde alle ganzzahligen Lösungen von*

$$x^2 + y^2 + 12x - 16y + 99 = 0!$$

Lösung. Hier kann man sowohl für x, als auch für y quadratisch ergänzen, und erhält:

$$\begin{aligned} x^2 + 12x + 36 + y^2 - 16y + 64 + 99 - 36 - 64 &= 0 \\ (x + 6)^2 + (y - 8)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung heißt aber, dass genau einer der beiden Summanden (die ja nicht negativ sind) gleich 0, der andere gleich 1 sein muss. Dabei ist zu beachten, dass in letzterem Fall sowohl 1 also auch -1 für den Term in Klammern in Frage kommt. Man erhält also entweder $x + 6 = 0$ und $y - 8 = \pm 1$ oder $x + 6 = \pm 1$ und $y - 8 = 0$. Zusammengefasst sind die Lösungen also $(-6, 9)$, $(-6, 7)$, $(-5, 8)$ und $(-7, 8)$.

Aufgabe 1. *Man finde alle Tripel ganzer Zahlen, so dass die Summe der Quadrate der drei Zahlen gleich dem Vierfachen ihrer Summe ist!*

Gleichungen höheren Grades

Der *Grad* einer (Polynom-)Gleichung in einer Variable ist die die höchste Potenz, mit der die Variable in der Gleichung vorkommt. Quadratische Gleichungen sind also vom Grad 2. In der Schule werden häufig Gleichungen höheren Grades als 2 nur sehr kurz behandelt. Ein Grund dafür ist wahrscheinlich der, dass zwar für den Grad 3 und den Grad 4 noch Lösungsformeln ähnlich denen in (4) existieren, diese aber recht kompliziert sind. Ein sehr schöner Satz der Algebra besagt, dass dann für Gleichungen vom Grad größer als 4 gar keine allgemeine Lösungsformel nach dem Vorbild (4) mehr existiert (obwohl ein weiterer hübscher Satz die Existenz dieser Lösungen garantiert!).
Man sollte aber nicht verzweifeln, wenn in einer Wettbewerbsaufgabe zum Beispiel Folgendes gefragt wird:

Beispiel 2. *Man finde alle reellen Lösungen von*

$$2 \cdot x^6 - 8 \cdot x^3 + 6 = 0 \tag{5}$$

Lösung. Es handelt sich (zum Glück!) nur um eine versteckte quadratische Gleichung. Dividiert man sie nämlich durch 2 und substituiert $y = x^3$, so ergibt sich

$$y^2 - 4y + 3 = 0,$$

was nach (4) die beiden Lösungen $y_1 = 3$ und $y_2 = 1$ hat. Für x gilt also $x_1 = \sqrt[3]{3}$ und $x_2 = 1$. Die Probe zeigt, dass dies auch wirklich Lösungen sind!

Durch geeignetes Substituieren kann man also einigen wenigen Gleichungen höheren Grades den Schrecken nehmen und man kann sich sicher sein, dass in Schülerwettbewerben auch nur solche verwandt werden. Das Problem ist aber manchmal, diese „geeignete Substitution" zu finden. Hier hilft nur Training! Noch ein recht wildes

Beispiel 3. *Finde alle reellen Lösungen von*

$$x^4 - 6x^2y + 10y^2 = 0. \tag{6}$$

Lösung. Hier hilft uns wieder die gute alte quadratische Ergänzung. Damit wird das x^4, das uns sowieso ein Dorn im Auge sein sollte, unschädlich gemacht, nämlich:

$$\begin{aligned} \left(x^2 - 3y\right)^2 + 10y^2 - 9y^2 &= 0 \\ \left(x^2 - 3y\right)^2 + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Da Quadrate nie negativ sein können, bleibt nur $y = 0$ und deswegen dann auch $x = 0$ als einzig mögliche, und nach Probe, auch wirkliche Lösung.

Aufgabe 2. *Man finde alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen*

a. $x^4 + y^4 + 2x^2 - 4y^2x + 1 = 0$

b. $x^6 + y^6 + z^6 + x^2 + y^2 + z^2 = 2(x^3y + y^3z + z^3x)$

c. $3x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y + z)$

Aufgabe 3. *Beweise, dass für jede positive ganze Zahl m die Gleichung*

$$x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0 \tag{7}$$

genau m verschiedene Lösungen (x, y) in positiven ganzen Zahlen hat.

Gleichungen mit Beträgen

Sehr unangenehm beim Gleichungslösen, aber eigentlich nicht wirklich schwierig, ist das Auftreten der Betragsfunktion. Diese ordnet jeder reellen Zahl x die Zahl $|x|$ (lies: „Betrag x") zu, wobei $|x| = x$, falls $x \geq 0$ und $|x| = -x$, falls $x < 0$. Diese Definition garantiert, dass für alle reellen Zahlen x die Ungleichung $|x| \geq 0$ gilt. Es ist also zum Beispiel $|3| = 3$, $|0| = 0$ und $|-2| = 2$. Letzlich gibt die Betragsfunktion so etwas wie den Abstand des der Zahl x entsprechenden Punktes auf dem Zahlenstrahl vom Punkt 0 an (und als Abstand kann er demnach nie negativ sein!)
Das Auftreten von Beträgen in Gleichungen bedeutet fast immer die Notwendigkeit von Fallunterscheidungen, da sich die Definition des Betrages ändert, wenn das Argument durch 0 läuft.

Beispiel 4. *Löse in reellen Zahlen*

$$|x - 7| + |x - 8| = 3.$$

Lösung. Der erste Summand durchläuft die 0 bei $x = 7$, der zweite bei $x = 8$. Das rechtfertigt folgende Fallunterscheidung:
1. Fall: $x \geq 8$
Dann ist sowohl $x - 8 \geq 0$, als auch $x - 7 \geq 0$. Deswegen gilt:

$$3 = |x - 7| + |x - 8| = (x - 7) + (x - 8) = 2x - 15$$

mit der einzigen Lösung $x = 9$.
2. Fall: $7 \leq x < 8$
Hier ist $x - 8 < 0$ aber $x - 7 \geq 0$. Deswegen gilt:

$$3 = |x - 7| + |x - 8| = (x - 7) + (8 - x) = 1$$

Diese Gleichung stellt einen Widerspruch dar, also erfüllt in diesem Fall kein x die Gleichung.
3. Fall: $x < 7$
Jetzt sind beide Terme negativ, also $x - 7 < 0$ und $x - 8 < 0$. Man hat also:

$$3 = |x - 7| + |x - 8| = (7 - x) + (8 - x) = 15 - 2x$$

was die einzige Lösung $x = 6$ hat.
Die Probe bestätigt, dass genau die beiden Zahlen $x = 6$ und $x = 9$ die Gleichung erfüllen. Wichtig ist hierbei auch, dass die gefundenen x auch in den bei der Fallunterscheidung angenommenen Bereichen liegen, also wirklich $9 > 8$ und $6 < 7$ gilt.

Nützlich beim Rechnen mit Beträgen sind auch folgende einfach einzusehenden Beziehungen:

1. Für alle reellen Zahlen x und y gilt: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
2. Für alle reellen Zahlen x und y gilt: $|x+y| \leq |x|+|y|$. Dies ist die sogenannte Dreiecksungleichung.

In der Dreiecksungleichung gilt genau dann Gleichheit, wenn x und y dasselbe Vorzeichen haben, denn genau dann addieren sich auch die „Abstände“ vom Nullpunkt auf dem Zahlenstrahl.
Zwei weitere nützliche Gleichungen seien als Übungsaufgabe überlassen.

Aufgabe 4. *Für zwei reelle Zahlen x und y bezeichne $max(x, y)$ das größere und $min(x, y)$ das kleinere der beiden. Man beweise, dass*

$$max(x,y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \textit{und} \quad min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

gilt!

Aufgabe 5. *Man finde alle reellen Lösungen von*

$$|x^2 - 6x| = |x - 1|$$

Aufgabe 6. *Man finde alle reellen Lösungen von*

$$|x^2 - 4x + 3| = |x^2 - 2x|$$

Aufgabe 7. *Es sei n eine beliebige ganze Zahl und m eine positive ganze Zahl. Man bestimme die Lösungen der Gleichung*

$$|x - (n + m)| + |x - (n + m - 1)| + \ldots + |x - n| = a$$

in Abhängigkeit vom Parameter a!

Worauf man achten muss...

...ist, wie in der Einleitung schon erwähnt, dass beim Umformen von Gleichungen gelegentlich Ausdrücke auftreten, die nicht definiert sind. So sollte man in jedem Fall folgende Regeln beachten:

A Bei <u>jedem</u> in einem Bruch auftretenden Nenner ist zu prüfen, ob dieser Null werden kann. Das Ergebnis dieser Prüfung sollte man am Rand bemerken (zum Beispiel „da $x \neq 0$“, oder „Fall $x - 1 = 0$ wird extra behandelt“)!

B Bei <u>jeder</u> auftretenden Wurzel ist zu prüfen, ob der Term unter der Wurzel negativ sein kann und auch dieses ist am Rand zu bemerken.

Das Nichtbeachten dieser Regeln ist eine der häufigsten Fehlerquellen bei Lösungen von Wettbewerbsaufgaben, obwohl die Regeln jedem klar sein dürften.

Aufgabe 8. *Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung*

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x-2a)(x+a)}$$

erfüllen. Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

Aufgabe 9. *Man finde alle reellen Zahlen x, welche die Gleichung*

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$$

erfüllen, wobei p eine beliebige positive reelle Zahl ist.

Aufgabe 10. *Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen x, die der Gleichung*

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}$$

genügen.

Der Satz von Vieta

Unter einer *normierten Polynomgleichung in einer Variablen* verstehen wir im Folgenden eine Gleichung, die nur Potenzen dieser Variablen enthält und deren Koeffizient vor der höchsten Potenz der Variablen gleich 1 ist (daher *normiert*), also eine Gleichung der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \tag{8}$$

Die Normalform (2) der quadratischen Gleichung ist zum Beispiel eine solche. In der Algebra gibt es nun einen hübschen Satz, der Folgendes besagt: Ist x_1 eine Lösung einer solchen normierten Polynomgleichung in einer Variablen vom Grad n, so gibt es reelle Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}$, so dass

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - x_1) \cdot \left(x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0\right)$$

ist. Man kann also einen solchen Faktor $(x - x_1)$ „abspalten". Daraus folgt leicht, dass wenn x_1 bis x_n alle Lösungen (mehr als n Stück kann es wegen des sogenannten *Fundamentalsatzes der Algebra* gar nicht geben) obiger Gleichung sind, Folgendes gilt:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Multipliziert man hierin die rechte Seite aus und ordnet nach den entsprechenden Potenzen von x, so folgt durch einen Vergleich der Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen der *Satz von Vieta*:

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) \\
a_{n-2} &= \left(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 \ldots x_{n-1}x_n\right) \\
&\vdots \\
a_1 &= (-1)^{n-1}\left(x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} + x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n\right) \\
a_0 &= (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Information über die Lösungen der Gleichung schon allein in den Koeffizienten a_0 bis a_{n-1} steckt (wo auch sonst!), nur sie herauszukitzeln, ist, wie man an obigen komplizierten Ausdrücken sieht, meist nicht einfach. Merken sollte man sich aber wenigstens die entsprechenden Ausdrücke für die quadratische Gleichung. Hier gilt also für die Lösungen x_1 und x_2 von $x^2 + px + q = 0$ immer

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -p \quad \text{und} \\
x_1x_2 &= q.
\end{aligned}$$

Dies kann man zum Beispiel auch direkt mit (4) nachrechnen.
Benutzen kann man dies zum Beispiel dazu, um bei gegebener normierter Polynomgleichung mit ausschließlich ganzzahligen Lösungen, ganzzahlige Nullstellen zu raten, denn diese müssen nach obigem Satz ja stets den Koeffizienten a_0 teilen.

Beispiel 5. *Man finde alle reellen Zahlen a, für die die Gleichung*

$$x^3 + ax^2 - x + 2 = 0$$

drei ganzzahlige Lösungen hat.

Lösung. Nach Vieta kommen in den Fällen, in denen die Gleichung nur ganzzahlige Lösungen hat, nur Teiler von 2, also $-2, -1, 1, 2$ als Lösungen in Frage. Setzt man in die Gleichung für x einen der Werte $1, -1$ oder 2 ein, so erhält man $a = -2$. Die Probe zeigt, dass in diesem Fall die Bedingung der Aufgabe erfüllt ist, denn die Gleichung $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ hat genau die Lösungen $1, -1$ und 2. Für $x = -2$ ergibt sich $a = 1$. Die Gleichung $x^3 + x^2 - x + 2 = 0$ hat aber keine der anderen drei möglichen Nullstellen, also noch zwei weitere nicht-ganzzahlige.

Aufgabe 11. *Man beweise: Hat die Gleichung*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

drei verschiedene positive, reelle Lösungen, so gilt

$$\left(\frac{p^2 - 2q}{3}\right)^3 > r^2.$$

Aufgabe 12. *Löse die Gleichung*

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

Aufgabe 13. *Man bestimme die Koeffizienten a, b und c der Gleichung*

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

so, dass sie auch die Lösungen dieser Gleichung sind!

Aufgabe 14. *Für welchen Wert des Parameters m nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung*

$$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$$

den kleinsten Wert an?

Gleichungen mit rationalen oder ganzzahligen Lösungen

Gleichungen in mehreren Variablen haben oft unendlich viele Lösungen, wie zum Beispiel die *Kreisgleichung*

$$x^2 + y^2 = 17$$

Oft wird bei Wettbewerbsaufgaben aber nach rationalen oder ganzzahligen Lösungen solcher Gleichungen gefragt. Das schränkt die Lösungsmenge oft beträchtlich ein. In ganzen Zahlen hat obige Gleichung zum Beispiel nur noch die Lösungen $(4,1)$,$(-4,1)$, $(4,-1)$, $(-4,-1)$ und die vier aus diesen durch Vertauschen von x und y erhaltenen. Das sind acht Stück also weit weniger als unendlich viele. Insbesondere sieht man, dass die Einschränkung auf ganze Zahlen die Möglichkeit bietet, die Lösungen durch Probieren zu finden, indem man zuvor beweist, dass diese unter einer bestimmten endlichen Menge von Zahlen zu finden sind. Hier zum Beispiel würde man argumentieren, dass weder x noch y dem Betrage nach größer als 4 sein dürfen, da $5^2 = 25 > 17$ und Quadratzahlen stets positiv sind. Die vergleichsweise wenigen übrigen Paare $-4 \leq x, y \leq 4$ kann man dann recht schnell von Hand durchsuchen.
Ein anderes Argument, das die Lösungsmenge auf eine endliche Menge einschränken kann, ist häufig die Teilbarkeit, wie wir weiter unten sehen werden. Bevor wir zu einigen Beispielen kommen noch eine kleine Bemerkung: Von Lösungen in rationalen Zahlen war bisher noch gar nicht die Rede! Dies geschah und geschieht aber zu recht, denn löst eine rationale Zahl $x = \frac{r}{s}$ (mit $s \neq 0$) eine Polynomgleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

so gilt nach Multiplikation mit s^n auch

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1}s + a_{n-2}r^{n-2}s^2 + \ldots + a_1rs^{n-1} + a_0s^n = 0.$$

Anstatt also nach rationalen x Lösungen der ersten Gleichung zu fragen, kann man genauso nach ganzzahligen Lösungen (r,s) der zweiten Gleichung fragen. Meist nimmt man dann noch zusätzlich an, x sei schon als reduzierter Bruch dargestellt gewesen, und darf deshalb fordern, dass r und s teilerfremd sind. Das liefert einen sehr guten Einstieg in Teilbarkeitsaussagen.
Jetzt aber zu

Beispiel 6. *Man beweise: Sind die Koeffizienten a, b, c der quadratischen Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ungerade ganze Zahlen, dann hat die Gleichung keine rationalen Lösungen!

Lösung. Man tut exakt das, was im letzten Abschnitt beschrieben stand: Angenommen, $x = \frac{r}{s}$ ist eine Lösung mit teilefremden r und s, dann gilt auch

$$ar^2 + brs + cs^2 = 0.$$

Da r und s teilerfremd sind, können nicht beide gerade sein.
Ist genau eine der beiden Zahlen gerade, z.Bsp. r, so ist ar^2 und brs gerade aber cs^2 ungerade. Das kann nicht sein, da somit die Summe der drei Terme links ungerade, also ungleich 0 wäre.
Wären beide Zahlen r und s ungerade, so wären alle drei Summanden links ungerade, was wieder nicht sein kann.
Somit war die Annahme falsch und es gibt keine rationalen Lösungen.

Aufgabe 15. *Man bestimme alle positiv, ganzzahligen Lösungen von*

$$x^2 - 4xy + 6y^2 - 2yz + z^2 = 8 \tag{9}$$

Aufgabe 16. *Gesucht sind alle Paare (x, y) ganzer Zahlen, für die gilt:*

$$x(x+2)(x+4)(x+6) = y^2. \tag{10}$$

Gleichungssysteme

Nun wollen wir zum „Höhepunkt" der Behandlung von Gleichungen kommen, nämlich den Gleichungssystemen. Leider (oder für die Aufgabenmacher zum Glück) ist es dabei so, dass es eine solche Vielfalt von Möglichkeiten für derartige Systeme von Gleichungen gibt, dass es schwer fällt, allgemeine Tipps und Tricks bekanntzugeben. Wie so oft macht hier Übung und Erfahrung den Meister!
Nichtsdestotrotz folgen nun einige gute Ratschläge.

Umformen und Einsetzen

Bei wenigen, meist nur zwei Gleichungen, ist es oft gut möglich die eine der Gleichung nach einer Variablen umzuformen und anschließend in die zweite einzusetzen. Diese Methode führt gelegentlich nur zu noch komplizierteren Gleichungen, aber manchmal...

Beispiel 7. *Man bestimme alle Lösungen von*

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 3 \\ x^9 + y^9 &= 9 \end{aligned}$$

Lösung. Wenn ein Paar (x, y) die Gleichungen erfüllt, dann ist auch $y^3 = 3 - x^3$, eingesetzt in die zweite Gleichung also

$$x^9 + y^9 = x^9 + 27 - 27x^3 + 9x^6 - x^9 = 9$$

also

$$x^6 - 3x^3 + 2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x^3 (wir haben Glück!), also findet man

$$x^3 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

und dazu gehörig $y^3 = \frac{3 \mp 1}{2}$. Zieht man noch die (eindeutigen) dritten Wurzeln, so findet man die einzigen möglichen Lösungspaare $(\sqrt[3]{2}, 1)$ und $(1, \sqrt[3]{2})$.
Die Probe bestätigt, dass dies auch wirklich Lösungen sind.

Man versuche sein Glück bei

Aufgabe 17. *Finde alle reellen Lösungspaare (x, y) von*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^6 + y^6 &= \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Aufgabe 18. *Finde alle reellen Lösungspaare (x, y) von*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ x^2 + xy &= 6. \end{aligned}$$

Symmetrie

Wie in vielen anderen Bereichen Mathematik spielen Symmetrien oft eine entscheidende Rolle, es gilt sie nur zu erkennen. Oft braucht man dazu nur die gegebenen Gleichungen anschauen.

Beispiel 8. *Löse in reellen Zahlen:*

$$\begin{aligned} x^2 - xy &= 1 \\ y^2 - xy &= 3. \end{aligned}$$

Lösung. Die zu erkennende Symmetrie findet sich hier auf der linken Seite! Addieren liefert dann

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4 \iff (x-y)^2 = 4 \iff x - y = \pm 2$$

Setzt man nun $x = y + 2$ bzw. $y = x + 2$ in eine der obigen Gleichungen ein, so ergeben sich die Lösungen $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. (Probe!)

Mit einem ähnliche Trick behandle man

Aufgabe 19. *Finde alle n-Tupel ($n \geq 3$) reeller Zahlen, die die Gleichungen*

$$\begin{aligned} x_1^2 + 1 &= x_n + x_2 \\ x_2^2 + 1 &= x_1 + x_3 \\ &\vdots \\ x_n^2 + 1 &= x_{n-1} + x_1 \end{aligned}$$

erfüllen.

Etwas schwerer ist schon folgende

Aufgabe 20. *Finde alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichungen*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 6 \end{aligned}$$

erfüllen.

Wieder mit dem Trick aus der Beispielaufgabe behandle man...

Aufgabe 21. *Finde alle n-Tupel ($n \geq 2$) reeller Zahlen, die die Gleichungen*

$$\begin{aligned} x_1^2 + 3x_1 + 1 &= x_2 \\ x_2^2 + 3x_2 + 1 &= x_3 \\ &\vdots \\ x_n^2 + 3x_n + 1 &= x_1 \end{aligned}$$

erfüllen.

Aufgabe 22. *Seien a, b, c drei reelle Zahlen. Man löse das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x^2y^2 + x^2z^2 &= axyz \\ y^2z^2 + y^2x^2 &= bxyz \\ z^2x^2 + z^2y^2 &= cxyz. \end{aligned}$$

Trigonometrische Gleichungen

Zu diesem Thema ist wiederum nicht viel zu sagen, außer das man in den meisten Fällen durch genügend häufiges Anwenden der Additionstherome für Sinus und Kosinus, sowie der Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ zum Ziel kommt. Man versuche sich an folgenden Beispielen:

Aufgabe 23. *Man ermittle alle diejenigen Paare reeller Zahlen (x, y) mit $0 \leq x, y < 2\pi$, für die die Gleichungen*

$$\begin{aligned} 3 \sin x \cos y &= \cos x \sin y \\ \sin^2 x + \cos^2 y &= 1 \end{aligned}$$

gelten.

Aufgabe 24. *Man ermittle alle diejenigen Paare reeller Zahlen (x, y), für die die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= y^4 + x^2 y^2 - 4y^2 + 4 \\ \cos^4 x &= x^4 + x^2 y^2 - 4x^2 + 1 \end{aligned}$$

gelten.

Aufgabe 25. *Man löse die Gleichung*

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

für beliebige natürliche Zahlen n.

Aufgaben

Löse bitte wenigstens die Aufgaben 6, 9, 14, 15 und 21 und versuche dich an der

...ANDEREN Aufgabe

Jede positive, rationale Zahl x habe die beiden *Kinder* $x + 1$ und $\frac{x}{x+1}$.
Beweise, dass jede positive rationale Zahl in diesem Sinne auf genau eine Art und Weise *Nachfahre* der 1 ist.